Cadre : On fixe (E, d) un espace métrique, qui est donc séparable.

I Généralités sur la compacité

1) Propriété de Borel-Lebesgue

Définition 1. Un espace métrique (E, d) est compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini. On dit qu'une partie $A \subset E$ est compacte si elle est compact pour la topologie induite.

Remarque 2. *Cette définition a un analogue en topologie générale, mais on y adjoint une condition de séparation, toujours réalisée dans le cas d'un espace métrique.*

Exemple 3. *(i)* $\mathbb{R}$ *n'est pas compact*

(ii) Tout espace métrique fini est compact.

(iii) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *est compact.*

Exemple 4. *Tout espace métrique compact est borné.*

Proposition 5. (E, d) *est un compact si, et seulement si, de toute intersection vide de fermés de* E *on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.*

Proposition 6. *Toute suite décroissante de fermés non vides d'un espace compact* E *admet une intersection non vide.*

Contre-exemple 7. *Dans* $\mathbb{R}^n$, $F_n = [n, +\infty[$ *contredit cette conclusion.*

Proposition 8. *Une réunion finie de compacts est compacte. Une intersection de compacts est compacte.*

2) Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 9 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Un espace métrique* (E, d) *est compact si, et seulement si, de toute suite de points de* E *on peut extraire une sous-suite convergente dans* E.

Corollaire 10. *Un espace métrique* (E, d) *est compact si, et seulement si, toute partie infinie de* E *admet un point d'accumulation dans* E.

Corollaire 11. *Un fermé d'un compact est compact.*

Corollaire 12. *Tout espace métrique compact est complet.*

Définition 13. E est dit précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de E par une famille finie de boules ouvertes de rayon ε.

Théorème 14. *Un espace métrique* (E, d) *est compact si, et seulement si, il est précompact et complet.*

Corollaire 15. *Les segments de* $\mathbb{R}$ *sont compacts.*

Proposition 16. *Soit* (E, d) *un espace métrique compact et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E *telle que* $\lim_{n\to+\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$. *Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est connexe.*

Application 17. *Soient* $f : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction continue et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $x_0 \in [0,1]$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si, et seulement si,* $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

II Fonctions continues sur un compact

1) Continuité et extrema

Soit $f : E \to F$ continue avec E compact et F un espace métrique.

Proposition 18. $f(E)$ *est compact.*

Proposition 19. *Si* f *est bijective, c'est un homéomorphisme.*

Corollaire 20. *Si* $F = \mathbb{R}$, *alors* f *est bornée et atteint ses bornes.*

Application 21 (Rolle)**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue et dérivable sur* $]a, b[$ *telle que* $f(a) = f(b)$. *Alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Application 22 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** *Soit* K *un compact d'intérieur non vide de* $\mathbb{R}^n$, *alors il existe un unique ellipsoïde de centre 0 et de volume minimal contenant* K.

Proposition 23. *Soit* E *un espace vectoriel normé de dimension finie et* $f : E \to \mathbb{R}$ *continue et coercive. Alors* f *admet un minimum sur* E.

Application 24 (D'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme de* $\mathbb{C}[X]$ *admet une racine dans* $\mathbb{C}$.

Application 25. *Soient* $F \subset E$ *compact et* $a \in E$. *Il existe* $x \in F$ *tel que* $d(a, F) = d(a, x)$.

Application 26. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue et* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Il existe* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *qui réalise la distance de* f *à* $\mathbb{R}_n[X]$. *C'est le polynôme de meilleure approximation de* f *de degré* n.

2) Théorème de Heine

Théorème 27 (Heine)**.** *Toute application continue $f : E \to F$ où E est compact est uniformément continue.*

Exemple 28. $x \mapsto \sin(x^2)$ *n'est pas continue sur* $\mathbb{R}$*, contrairement à* $\sin$.

Proposition 29. *Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et périodique est uniformément continue.*

Proposition 30. *Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $\pm\infty$ est uniformément continue.*

Application 31. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Alors* $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Théorème 32 (Dini)**.** *Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues et convergeant simplement vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Si les f_n sont croissantes, alors la convergence est uniforme.*

3) Théorèmes de points fixes

Théorème 33. *Soient E compact et $f : E \to E$ continue telle que, pour tous $x, y \in E$ distincts, on a $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Alors f admet un unique point fixe.*

Contre-exemple 34. *Ceci est faux si E est seulement complet. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{-\star}}(x) + \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+\star}}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ ne possède pas de point fixe sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 35. *Soient E compact et $f : E \to E$ continue telle que, pour tous $x, y \in E$ distincts, on a $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x,y)$. Alors f est une isométrie bijective.*

Théorème 36 (Brouwer)**.** *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet (au moins) un point fixe.*

4) Résultats de densité

On fixe (E,d) compact. Soit $\mathcal{C}^0(E,K)$ l'ensemble des fonctions continues de E dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 37. $(\mathcal{C}^0(E,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach séparable.*

Définition 38. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{K})$. On dit que V est séparant si, pour tous $x, y \in E$, distincts, il existe $h \in V$ tel que $h(x) \neq h(y)$. On dit que V est réticulé s'il est stable par passage au sup et à l'inf de deux éléments.

Théorème 39. *Tout sous-espace vectoriel réticulé séparant de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.*

Exemple 40. *Les fonctions lipschitziennes sont denses dans $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.*

Proposition 41. *Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{K})$ est réticulée.*

Théorème 42 (Stone-Weierstrass)**.** *Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$*

Exemple 43. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est compact, les fonctions polynômiales sont denses dans $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$. En particulier pour $d = 1$, on retrouve le théorème de Weierstrass.*

Théorème 44 (Weierstrass)**.** *L'ensemble des polynômes sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*

III Compacité en dimension finie

1) Espaces vectoriels normés

On fixe (E,d) un espace vectoriel normé.

Proposition 45. *Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Théorème 46. *Les parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie sont ses parties fermées bornées.*

Corollaire 47. *Toute application linéaire $E \to F$, où E est de dimension finie, est continue.*

Contre-exemple 48. *Munissons $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\left\|\sum_{i=0}^n a_i X^i\right\|_\infty = \sup_{i\in[\![0,n]\!]} |a_i|$. La dérivation sur $(\mathbb{R}[X], \|.\|_\infty)$ n'est pas continue.*

Théorème 49 (Riesz)**.** *La boule unité fermée de E est compacte si, et seulement si, E est de dimension finie.*

Exemple 50. *La boule unité de $\mathcal{C}^0([0,1])$ n'est pas compacte. En effet, les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ convergent vers une fonction non continue.*

2) Théorème d'Ascoli

On considère un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 51. Une famille de fonctions $Y \subseteq \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ est dite équicontinue lorsque :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0,\ \forall\,f\in Y,\ |x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Exemple 52. *(i) Une partie finie de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ est équicontinue.*

(ii) Une suite uniformément convergente de fonctions de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ forme une famille équicontinue.

(iii) L'ensemble des fonctions lipschitziennes est équicontinu.

Théorème 53 (Ascoli)**.** *Soit $Y \subseteq \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. Sont équivalentes :*

(i) Y est équicontinue et bornée pour la norme uniforme.

(ii) $\overline{Y}$ est compacte.

Application 54. *Soient X et Y deux espaces métriques compacts, μ une mesure borélienne finie et $K\in\mathcal{C}^0(X\times Y,\mathbb{K})$. On considère l'application :*

$$T:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^0(Y,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(X,\mathbb{K})\\ x & \longmapsto & \int_Y K(x,y)f(y)\,d\mu(y)\end{array}\right.$$

Alors $T\left(B_{\mathcal{C}^0(Y,\mathbb{K})}(0,1)\right)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{K})$.

Développements

- Ellipsoïde de John-Loewner (22) [FGN13c]
- Connexité des valeurs d'adhérence d'une suite (16,17) [Gou08] [FGN13d]
- Théorème de Weierstrass (44) [Gou08]

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse*. Ellipses, 2008
[Pom97] Alain Pommelet. *Cours d'Analyse*. Ellipses, 1997
[FGN13a] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 1*. Cassini, 2013
[FGN13c] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 3*. Cassini, 2013